Massenträgheitsmoment

Die kinetische Energie eines bewegten Massenpunkts beträgt $E = mv^2/2$

Bei einer kreisförmigen Bewegung kennt man statt der Bahngeschwindigkeit meistens die Kreisfrequenz ω und den Bahnradius. Daher schreibt man für die kinetische Energie auch:

$$E = mv^2/2 = m(r.\omega)^2/2 = mr^2 * \omega^2/2 = J * \omega^2/2$$

Aus Überlegungen, die erst bei der Berechnung von voluminösen rotierenden Körpern verständlich werden, rechnet man die Winkelgeschwindigkeit, die für alle Punkte des Festkörpers gleich ist, heraus. Den Radius² schlägt man der Masse zu und bezeichnet das Produkt $mr^2 = J$ als Massenträgheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r vom Drehpunkt.
Das Massenträgheitsmoment J spielt bei der Drehbewegung die Rolle der Masse m bei der linearen Bewegung.

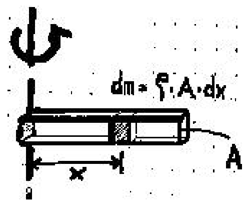
Massenträgheitsmoment eines Stabes um eine Achse am Ende

Ein Stab der Länge L besteht aus lauter hintereinander gereihten Massen $dm = \rho * dV$.
Das Stabvolumen V ist dabei gleich Querschnittsfläche A mal Länge L und ρ ist die Massendichte = Volumen / Masse) ($V = A*L$, $\rho = M/L$)

Bezüglich einer Drehachse am Ende des Stabe besitzt dein solches Massenelement ein Massenträgheitsmoment von $J_i = m_i x_i^2$.

Für das gesamte Trägheitsmoment sind sind
alle einzelnen Momente $J_i = m_i * x_i^2$ aufzusummieren.

Das differentielle Massenelement ist $dm = \rho * dV = \rho * A * dx$



ρ...Massendichte, A ... Querschnitt, dx... Länge des Volumenelements

und somit wird aus

$$J = \int_0^M x^2 \, dm$$

das Integral

$$J = \rho \cdot A \cdot \int_0^L x^2 \, dx \rightarrow J = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot A \cdot L^3$$

und wegen $\rho * A * L = M$

mit dem Endergebnis

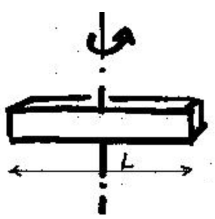
$$J = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2$$

Um das Massenträgheitsmoment des Stabes um seine Schwerpunktsachse
zu bekommen, kann man den Satz von Steiner anwenden. Dieser besagt, dass das Massenträgheitsmoment J_s um eine Drehachse durch den Schwerpunkt um $m*s^2$ vergrößert wird, wenn sich die Drehachse um den Abstand s parallel verschiebt:

$$J = J_s + m \cdot s^2$$

Ich benutze diesen Satz um von der außermittigen Achse auf die Schwerpunktsachse zurückzurechnen:

$$J_s = J - m \cdot s^2$$

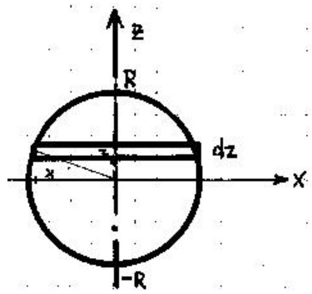


Verschiebung der Achse um $s = L/2$

$$J_s = \frac{1}{3} M \cdot L^2 - M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow J_s = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2$$

Massenträgheitsmoment einer stehenden Scheibe

Möchte man ein flächenhaftes Gebilde um eine Achse rotieren lassen, die in der Fläche verläuft, so muss man die Funktion der Kontur kennen. Eine Scheibe, die um eine Achse in ihrer Ebene rotiert, hat beispielsweise einen Kreis als Kontur:



$$R^2 = x^2 + z^2 \qquad V = \Delta d \cdot R^2 \pi \qquad dm = \rho \cdot dV$$

Δd ... Dicke der (dünnen) Scheibe, R... Radius der Scheibe, L_z = 2*x ..Länge eines Elements bei der Höhe z

Für einen Stab mit dem Drehpunkt in der Mitte wurde das Integral schon berechnet:

$$J = \frac{1}{12} \cdot \int L^2 \, dm = \frac{\rho}{12} \cdot \int (2x)^2 \, dV$$

setzt man für das Volumenselement $dV = \Delta d \cdot L_z \cdot dz = \Delta d \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - z^2} \cdot dz$

$$J = \frac{\rho \cdot \Delta d}{12} \cdot \int_{-R}^{R} \left(2 \cdot \sqrt{R^2 - z^2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - z^2} \, dz$$

$$J = \frac{\rho \cdot \Delta d}{12} \cdot \int_{-R}^{R} 8\left(\sqrt{R^2 - z^2}\right)^3 dz \rightarrow J = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \Delta d \cdot R^4 \cdot \pi$$

setzt man wieder für ρ*Δd*R²π = ρ*V = M, die Masse der Scheibe ein, so erhält man

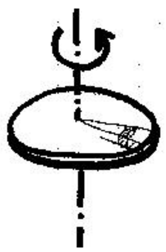
$$J = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \Delta d \cdot R^2 \cdot \pi \cdot R^2 \qquad J = \frac{1}{4} \cdot M \cdot R^2$$

Massenträgheitsmoment einer Scheibe um eine Drehachse senkrecht zur Scheibe:

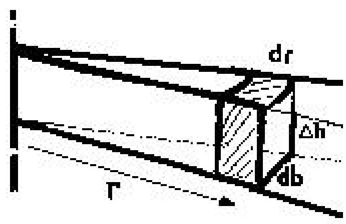
Das Massenträgheitsmoment einer punktförmigen Masse m_i im Normalabstand r_i von einer Drehachse ist $J_i = r_i^2 \, m_i$

Das Massenträgheitsmoment eines starren, festen Körpers ist dann die Summe der einzelnen Massenträgheitsmomente um diese Achse.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left[(r_i)^2 \cdot \Delta m_i \right]$$



Eine Scheibe wird in kleine Teilmassen aufgeteilt und zwar hat ein solches Volumenselement die Abmessungen (Δr) in radialer Richtung, Δb = r*Δφ in lateraler Richtung und Δh in der Höhe.



$$J = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(r_i)^2 \cdot \Delta V \right] \qquad \rho = \frac{M}{V}$$

Massendichte

Alu : 2700 kg/m³, St

$$J = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\left(r_i\right)^2 \cdot \Delta h \cdot \Delta\varphi \cdot r_i \, \Delta r \right]$$

$$M = \rho \cdot V$$

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V$$ differentiell kleiner Massenteil

Als Integral angeschrieben $$J = \rho \cdot \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \, dr \, d\varphi \, dh$$

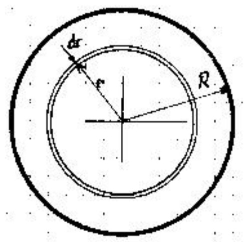
$$J = \rho \cdot H \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}$$

Da das Volumen der Scheibe V= R²π *H beträgt, schreibt man

$$J = \rho \cdot V \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$

Die Höhe ist in der endgültigen Formel verschwunden, d.h. sie gilt auch für einen beliebig langen Zylinder. Die Höhe H steckt nämlich in der Masse M.

Man kann natürlich auch eine **andere Unterteilung** der Kreisscheibe treffen:



Alle Massen in einem Ring haben das Trägheitsmoment J = m*r² .

Wenn man diese Ringe aufsummiert von r= 0 bis r=R, so erhält man in Integralschreibweise:

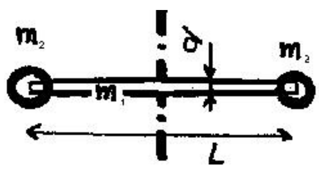
$$J = \int_0^R r^2 \, dm$$

Masse eines differenziell schmalen Kreisrings : dm = ρ*dV = ρ*2rπ*H*dr

$$J = \rho \cdot \int_0^R r^2 \cdot 2r\pi \cdot H \, dr$$

$$J = \rho \cdot 2\pi H \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$ wie oben.

Welches Drehmoment M wird benötigt, um einen hantelförmigen Körper in 1Sekunde vom Stillstand auf $\omega = 50$ rad/s gleichförmig zu beschleunigen?



Stahlstange : $L := 500\text{mm}$ $A := 20\text{mm}^2$ $\rho := 7600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Gewicht: $m_2 := 0.250\text{kg}$

Beschleunigung: $\omega_a := 0\text{s}^{-1}$ $\omega_e := 50\text{s}^{-1}$ $\Delta t := 1\text{s}$

Drehmoment = Massenträgheitsmoment x Winkel-Beschleunigung $\alpha := \frac{\omega_e - \omega_a}{\Delta t}$

Stange : $m_1 := \rho \cdot L \cdot A$ $J_1 := \frac{m_1}{12} \cdot L^2$ $J_1 = 1.583 \times 10^{-3} \, \text{m}^2 \cdot \text{kg}$

2 Massen : $J_2 := 2 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$ $J_2 = 0.031 \, \text{m}^2 \cdot \text{kg}$

Drehmoment: $M := \left(J_1 + J_2\right) \cdot \alpha$ $M = 1.642 \, \text{N} \cdot \text{m}$

Eine Kugel mit dem Durchmesser 5cm und der Masse m=0,5 kg rollt unter 45 Grad eine schiefe Ebene hinab. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit nach 1m Rollweg?

$g := 9.81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ $\quad r := 0.025\text{m}$ $\quad h := 1\text{m}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Energie :

$$\frac{m\cdot v^2}{2} + \frac{J\cdot\omega^2}{2} = m\cdot g\cdot h$$

$$m\cdot\omega^2\cdot r^2 + \frac{2}{5}\cdot m\cdot r^2\cdot\omega^2 = 2\cdot m\cdot g\cdot h$$

$$v = \omega\cdot r = \sqrt{\frac{5}{7}\cdot 2\cdot g\cdot h}$$

$$v := \sqrt{\frac{10}{7}\cdot g\cdot h} \qquad v = 3.148\ \frac{m}{s}$$
